Erweiterung des Satzes von Holditch für geschlossene Raumkurven

Herrn Prof. Dr. Walter Wunderlich zum 70. Geburtstag gewidmet

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 31, 1980, S.129-135

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Erweiterung des Satzes von Holditch für geschlossene Raumkurven

Herrn Prof. Dr. Walter Wunderlich zum 70. Geburtstag gewidmet

Von **Hans Robert Müller,** Braunschweig

(Eingegangen am 25. 4. 1980)

Es wird gezeigt, daß sich der klassische Satz von Holditch [1] in der Weise auf Raumkurven übertragen läßt, daß er bei Einführung einer geeigneten Metrik für die Normalprojektion auf eine beliebige Ebene des Raumes gilt.

I

Werden die Punkte X einer geschlossenen Kurve des euklidischen Raumes von drei Dimensionen auf ein orthonormiertes Dreibein $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ bezogen, wird also

$$\overrightarrow{0X} = e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = x$$

gesetzt, so stellt

$$(1) \qquad v_X = \oint x \times dx$$

den „Flächenvektor" der Kurve dar, wobei das Integral über die geschlossene Raumkurve zu bilden ist. Diesem Vektor kommt folgende Bedeutung zu: Der Normalriß der Kurve – die Projektionsrichtung sei durch den Einheitsvektor e gegeben – auf eine Ebene ε ist wiederum eine geschlossene Kurve, die in ε ein Gebiet vom Flächeninhalt F_X berandet. Hierbei gilt für das Skalarprodukt

$$(2) \qquad e \cdot v_X = 2\,F_X.$$

Zum Beweis kann man annehmen, daß ε durch 0 geht und $e_3 = e$ ist. Für den Normalriß ist dann

$$x^n = x - (e \cdot x)\,e, \quad dx^n = dx - (e \cdot dx)\,e.$$

Mit der Gaußschen Formel für den Flächeninhalt geschlossener ebener Kurven erhält man

$$2\,F_X = \oint (x_1^n\,dx_2^n - x_2^n\,dx_1^n) = \oint (e\;x^n\;dx^n) = \oint (e\;x\;dx)$$

und somit

$$e \cdot \oint x \times dx = 2\,F_X.$$

Mit $(a\,b\,c) = a \cdot (b \times c)$ wurde hierbei das Spatprodukt (Determinante) der drei Vektoren a, b, c bezeichnet.

II

Im folgenden betrachten wir im dreidimensionalen euklidischen Raum einen auf den Parameter t (Zeit) bezogenen, geschlossenen, zwangläufigen Bewegungsvorgang. Ihm kommt also eine Periode T zu, d.h. die von t abhängigen Größen, die ihn bestimmen, sind periodische Funktionen von t mit der gemeinsamen Periode T. Der bewegliche „Gangraum" R werde durch das orthonormierte Dreibein $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ repräsentiert. Den festen „Rastraum" R′ erfassen wir durch ein ebensolches Dreibein $\{0'; e_1', e_2', e_3'\}$. Wir denken uns den Ursprung 0 und die Vektoren e_i von der Zeit t abhängig und setzen

(3) $$\overrightarrow{0'0} = u = e_1 u_1 + e_2 u_2 + e_3 u_3.$$

Differentialvektoren sollen sich in der Folge stets auf das Rastkreuz beziehen.

Der reine Drehanteil des Bewegungsvorgangs erfüllt ein schief-symmetrisches System von Ableitungsgleichungen

(4) $$de_i = e_j\,\omega_k - e_k\,\omega_j \quad (i,j,k = 1,2,3 \text{ zykl.}),$$

wofür wir kurz auch

(4′) $$de_i = \omega \times e_i$$

schreiben können, wenn wir noch den Drehvektor

(5) $$\omega = e_1\,\omega_1 + e_2\,\omega_2 + e_3\,\omega_3$$

einführen. Dem Schiebanteil kommt der Vektor

(6) $$\begin{cases} \overline{\omega} = du = e_1\,\overline{\omega}_1 + e_2\,\overline{\omega}_2 + e_3\,\overline{\omega}_3, \\ \overline{\omega}_i = du_i + \omega_j u_k - \omega_k u_j \end{cases}$$

zu. Für einen im Gangraum R befestigten Punkt X gilt mit $x_i = \text{konst.}$

(7) $$\overrightarrow{0X} = x = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3,$$

(8) $$\overrightarrow{0'X} = \overrightarrow{0'0} + \overrightarrow{0X} = x' = u + x.$$

Mit (4), (5) gelangen wir zu

(9) $$\begin{cases} dx' = dx = e_1\,\xi_1 + e_2\,\xi_2 + e_3\,\xi_3, \\ \xi_i = \overline{\omega}_i + \omega_j\,x_k - \omega_k\,x_j. \end{cases}$$

Kürzer können wir dafür mit (5), (6) auch schreiben

(9′) $$dx = \overline{\omega} + \omega \times x.$$

III

Wir wollen nun für die geschlossene Bahnkurve des Punktes X den Flächenvektor v_X' im Rastraum R′ und dann den Projektionsinhalt F_X berechnen.

Aus (1) folgt

$$v_X' = \oint x' \times dx' = \oint (u+x) \times dx$$

und mit (9′)

$$(10) \qquad v_X' = \oint u \times \overline{\omega} + \oint x \times \overline{\omega} + \oint u \times (\omega \times x) + \oint x \times (\omega \times x).$$

Hierin ist das erste Integral als Flächenvektor v_0' der Bahnkurve des Punktes 0 zu deuten:

$$v_0' = \oint u \times \overline{\omega}.$$

Geben wir nun in R' durch e' mit $e'^2 = 1$ eine Projektionsrichtung vor, so gelangen wir mit (2) zu den Projektionsflächen

$$(11) \qquad 2\,F_X = e' \cdot v_X', \quad 2\,F_0 = e' \cdot v_0'.$$

F_0 ist der Inhalt der Normalprojektion der Bahn des Punktes 0. Die nächsten beiden Integrale in (10) führen zu einer Linearform in den x_i

mit
$$\begin{aligned} 2 \textstyle\sum B_i x_i &= e' \cdot \oint x \times \overline{\omega} + e' \cdot \oint u \times (\omega \times x) \\ 2\,B_i &= e' \cdot \oint (\overline{\omega}_j e_k - \overline{\omega}_k e_j) + \\ &+ e' \cdot \oint \left[u_i (e_j \omega_j + e_k \omega_k) - e_i (u_j \omega_j + u_k \omega_k) \right] \end{aligned}$$

bei zyklischen Anordnungen i, j, k von 1, 2. 3.

Schließlich liefert das letzte Integral in (10) eine quadratische Form in den x_i. Führen wir nämlich noch die Integralvektoren

$$(12) \qquad v_{ij}' = \oint e_i\, \omega_j$$

ein, dann folgt wegen der Geschlossenheit des Bewegungsvorgangs (Periode T) durch Integrieren von (4) erst einmal $v_{ij}' = v_{ji}'$. Es sei noch hervorgehoben, daß die Basisvektoren e_i des Gangkreuzes nun stets in ihrer Abhängigkeit von t (gegenüber dem Rastraum R') aufzufassen sind. Somit ist also das letzte Integral in (10)

$$\oint x \times (\omega \times x) = x^2 \oint \omega - \oint (x\omega)\, x = (\textstyle\sum v_{ii}') (\sum x_i^2) - \sum v_{ij}'\, x_i x_j.$$

Nach Einführung von

$$(13) \qquad 2\,F_{ij} = e' \cdot v_{ij}'$$

gelangen wir zu

$$(14) \qquad e' \cdot \oint x \times (\omega \times x) = 2\,(F_{11} + F_{22} + F_{33})\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2 \textstyle\sum F_{ij} x_i x_j.$$

Durch Zusammenfassung erhalten wir schließlich gemäß (10), (11) für die Projektionsfläche der Bahnkurve des Punktes X den Ausdruck

$$(15) \qquad F_X = F_0 + \textstyle\sum B_i x_i + (\sum F_{ii})\,(\sum x_i^2) - \sum F_{ij}\, x_i\, x_j.$$

Hierin laufen die Summationen über i bzw. j jeweils von 1 bis 3. Die x_i sind die Koordinaten des im Gangraum festen Punktes X, bezogen auf das Gangkreuz.

(15) kann gedeutet werden als

Satz: Alle Punkte X des Gangraums R, die bei einem geschlossenen Bewegungsvorgang für eine Projektionsrichtung e′ zum gleichen Inhalt F_X (Projektionsinhalt) der projizierten Bahnkurve führen, liegen im allgemeinen auf einer Quadrik.

Durch spezielle Wahl des Gangkreuzes in R gelangen wir zu einer Normalform von (15): Wir setzen den allgemeinen Fall voraus und transformieren obige Quadrik auf Hauptachsen. Der Ursprung 0 ist in R so zu verschieben, daß sämtliche linearen Glieder verschwinden ($B_i = 0$). Durch passende Drehung des Dreibeins erreichen wir dann, daß keine gemischt-quadratischen Glieder auftreten. Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung finden wir

$$F_X = F_0 + \sum A_i x_i^2, \quad A_i = F_{jj} + F_{kk}. \tag{16}$$

Die Gegenstücke zu obigem Satz und den Formeln (14),(15) gehen im Fall der ebenen Kinematik auf J. Steiner [2],[3] zurück.

IV

Auf der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte X,Y des Gangraumes wird durch

$$z_i = \lambda\, x_i + \mu\, y_i, \quad \lambda + \mu = 1 \tag{17}$$

ein weiterer Punkt Z erfaßt. Durch Einsetzen in (16) ergibt sich bei Bezugnahme auf das ausgezeichnete Gangkreuz

$$F_Z = \lambda^2 F_X + 2\,\lambda\mu\, F_{XY} + \mu^2 F_Y, \tag{18}$$

wobei

$$F_{XY} = F_0 + \sum A_i x_i y_i \tag{19}$$

gesetzt wurde. F_{XY} kann als gemischter Projektionsflächeninhalt*) angesprochen werden. Wegen

$$F_X - 2\,F_{XY} + F_Y = \sum A_i\,(x_i - y_i)^2$$

läßt sich (18) auch in der Form

$$F_Z = \lambda\, F_X + \mu\, F_Y - \lambda\mu \sum A_i\,(x_i - y_i)^2 \tag{20}$$

schreiben.

Bei allgemeiner Lage des Gangkreuzes lautet diese Beziehung

$$F_Z = \lambda\, F_X + \mu\, F_Y - \lambda\mu \left\{ \left(\sum F_{ii}\right) \left(\sum (x_i - y_i)^2\right) - \sum F_{ij}(x_i - y_i)\,(x_j - y_j) \right\}. \tag{20'}$$

Entsprechende Formeln gelten bereits auch für die zugehörigen Flächenvektoren.

*) Es gilt $F_{XY} = F_{YX}$, sowie $F_{XX} = F_X$. Die Polarform (19) entspricht dem gemischten Inhaltsbegriff H. Minkowski's.

V

Mit dem geschlossenen Bewegungsvorgang und der Projektionsrichtung e' verbinden wir nun im Gangraum R eine Metrik, bei der der Abstand $D(X,Y)$ zweier Punkte X,Y von R durch

$$D^2(X,Y) = \varepsilon \sum A_i (x_i - y_i)^2 \tag{21}$$

erklärt wird. Um stets reelle Abstände zu erreichen, wollen wir $\varepsilon = \pm 1$ wählen, je nachdem ob für zwei Punkte X,Y die quadratische Form

$$\sum A_i (x_i - y_i)^2 \gtrless 0$$

ausfällt. Im indefiniten oder semidefiniten Fall seien Nullrichtungen von der Betrachtung ausgeschlossen.

Bei allgemeiner Lage des Gangkreuzes ist

$$D^2(X,Y) = \varepsilon \left\{ \left(\sum F_{ii}\right) \left(\sum (x_i - y_i)^2\right) - \sum F_{ij} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \right\}. \tag{21'}$$

Durch Orientierung der Geraden XY läßt sich

$$D(X,Y) = -D(Y,X)$$

unterscheiden.

Messen wir nun in IV die Abstände der drei kollinearen Punkte X,Y,Z in dieser Maßbestimmung, so finden wir wegen

$$D(X,Z) + D(Z,Y) = D(X,Y)$$

die Darstellung der Parameter

$$\lambda = \frac{D(Z,Y)}{D(X,Y)}, \quad \mu = \frac{D(X,Z)}{D(X,Y)}.$$

Damit geht (20) über in

$$F_Z = \lambda F_X + \mu F_Y - \varepsilon \lambda \mu D^2(X,Y) \tag{22}$$

oder auch

$$F_Z = \frac{1}{D(X,Y)} \left(F_X \cdot D(Z,Y) + F_Y \cdot D(X,Z) \right) - \varepsilon D(X,Z) \cdot D(Z,Y). \tag{23}$$

Entsprechende Formeln der ebenen Kinematik sind bekannt. [3]

VI

Wir nehmen nun an, daß der zugrunde gelegte, geschlossene Bewegungsvorgang so beschaffen sei, daß sich auf der Bahnkurve des Punktes X von R auch noch ein weiterer, ebenfalls in R fester Punkt Y bewege, die gemeinsame geschlossene Bahnkurve also von zwei verschiedenen Punkten von R durchlaufen werde. Dann stimmen die zugehörigen Flächenvektoren v'_X und v'_Y und damit auch die Flächeninhalte F_X und F_Y zur Richtung e' überein. Mit $F_X = F_Y$ folgt aus (23) nun sofort

$$F_X - F_Z = \varepsilon\, D(X,Z) \cdot D(Z,Y). \tag{24}$$

Hiermit ist eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von Holditch [1] für Raumkurven gefunden. Es gilt der

Satz: Eine Strecke fester Länge werde so bewegt, daß ihre Endpunkte X,Y gerade einmal auf einer vorgegebenen geschlossenen Raumkurve herumgeführt werden. Ein Punkt Z der Geraden XY beschreibt hierbei ebenfalls eine geschlossene Raumkurve. Der Normalriß beider Kurven in einer beliebigen Projektionsrichtung e' führt zu zwei Projektionskurven, die ein ebenes ringförmiges Gebiet in der Projektionsebene begrenzen, dessen Flächeninhalt nach (24) nur von den Abmessungen der bewegten Strecken abhängen. Hierbei hat die Längenmessung im Sinne der durch den geschlossenen Bewegungsvorgang und die Projektionsrichtung bestimmten Metrik zu erfolgen.

Durch eine Zweipunktführung, d.h. durch die Bewegung von X und Y auf einer vorgegebenen geschlossenen Raumkurve ist ein räumlicher Bewegungsvorgang noch nicht eindeutig bestimmt: Drehungen um die XY-Achse sind noch frei.

Man kann sich von dieser einleuchtenden Tatsache sofort überzeugen, wenn man zur Vereinfachung das Gangkreuz so wählt, daß

$$x = 0, \;\; y = e_3 y_3, \;\; z = e_3 z_3 = \mu\, e_3 y_3$$

gilt. Eine Drehung durch den Winkel φ sieht dann so aus

$$\left.\begin{cases} \hat{e}_1 = e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi \\ \hat{e}_2 = -e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi \end{cases}\right\} \hat{e}_3 = e_3. \tag{25}$$

φ sei eine willkürliche Funktion des Parameters t. Daraus folgt

$$\left.\begin{cases} \hat{\omega}_1 = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi \\ \hat{\omega}_2 = -\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi \end{cases}\right\} \hat{\omega}_3 = \omega_3 + d\varphi. \tag{26}$$

Wegen (20′) ist für $F_X = F_Y$ nun

$$F_X - F_Z = \lambda\mu\, (F_{11} + F_{22})\, y_3^2.$$

Wir haben für das gedrehte System also nur die Größen $\hat{F}_{11}, \hat{F}_{22}$ zu berechnen. Mit (12),(25),(26) bestätigt man

$$\hat{v}'_{11} + \hat{v}'_{22} = v'_{11} + v'_{22}.$$

Da $\hat{y}_3 = y_3$, gilt somit auch

$$F_X - F_Z = \lambda\mu\, (\hat{F}_{11} + \hat{F}_{22})\, \hat{y}_3^2.$$

Der Winkel φ tritt hierbei überhaupt nicht in Erscheinung, kann also als beliebige Funktion von t gewählt werden.

Literaturverzeichnis

[1] A. HOLDITCH: Lady's and gentleman's diary for the year 1858.
[2] J. STEINER: Gesammelte Werke, Berlin 1881/82.
[3] H. R. MÜLLER: Abh. der Braunschw. Wiss. Ges. XXIX (1978), 107–113 und 115–119.